JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **40**, 355–363 (1984)

Un résultat de division obtenu par les méthodes de l'approximation

PIERRE GOETGHELUCK

Université de Paris-sud, centre d'Orsay, département de mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Communicated by Oved Shisha

Received December 26, 1980; revised January 11, 1982

INTRODUCTION

Soit g une fonction continûment dérivable sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ vérifiant $g(0) = 0$. On peut écrire $g = xf$ où f est une fonction continue sur I, et, il résulte facilement de la formule de Taylor que $\sup_{x\in I} |f(x)| \leqslant \sup_{x\in I} |g'(x)|$.

Mais pour $\delta \in]0, 1[$ on peut aussi poser $g = |x|^\delta f_\delta$ où f_δ est une fonction continue. Peut-on, comme précédemment, donner une majoration de f_δ en fonction de g et de δ? Le présent article répond par l'affirmative à cette question, dans un cadre un peu plus général. On pourra remarquer que les méthodes classiques de la théorie de l'approximation jouent un rôle essentiel pour établir les résultats.

NOTATIONS HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS

Soit $I = [+1, 1]$. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0, 1]$ avec $p + \alpha > 0$ on désignera par $C^{p,\alpha}$ l'ensemble des fonctions f d'une variable réelle, définies sur I, possédant une dérivée $f^{(p)}$, bornée si $\alpha = 0$, lipschitzienne d'ordre α sur I si $\alpha \neq 0$. Pour toute fonction f on note $\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|$ et $\|f\|^* = \sup_{x\in \mathbb{R}} |f(x)|$. Pour $g \in C^{p,\alpha}$ on note

$$M(g) = \| g^{(p)} \| \qquad \text{si } \alpha = 0,$$
$$= \sup_{x,y\in I} | g^{(p)}(x) - g^{(p)}(y)| |x - y|^{-\alpha} \qquad \text{si } \alpha = 0.$$

LEMME 1. *Soit $g \in C^{p,\alpha}$ et soit k tel que $0 \leqslant k < p + \alpha$. On suppose que*

0021-9045/84 $3.00

640/40/4-5

$g(0)=g'(0)=\cdots=g^{(k)}(0)=0$. *Alors pour tout* δ *vérifiant* $0<\delta<p+\alpha$ *et* $\delta\leqslant k+1$ *il existe une fonction continue* f_δ *telle que pour* $x\in I$,

$$g(x)=x^\delta f_\delta(x) \qquad \text{si } \delta\in\mathbb{N},$$
$$g(x)=|x|^\delta f_\delta(x) \qquad \text{si } \delta\notin\mathbb{N}.$$

Démonstration. Si $\delta\in\mathbb{N}$, $g^{(\delta)}$ est continue puisque $0<\delta<p+\alpha$ donc $g(x)=(1/\delta!)\int_0^x(x-t)^{\delta-1}g^{(\delta)}(t)\,dt=x^\delta f_\delta(x)$ où f_δ est continue.

Si $\delta\notin\mathbb{N}$ et $k<p$, alors $g^{(k)}$ possède une dérivée bornée par une constante M et, donc, $|g^{(k)}(t)|\leqslant M|t|$ $(t\in I)$. Par suite $|g(x)|=|(1/k!)\int_0^x(x-t)^k g^{(k)}(t)\,dt|\leqslant M'|x|^{k+1}$. Mais $\delta\leqslant k+1$ et $\delta\notin\mathbb{N}$, donc, $\delta<k+1$. Il en résulte que l'on peut écrire $g(x)=|x|^\delta f_\delta(x)$ où f_δ est une fonction continue nulle en 0.

Si $\delta\notin\mathbb{N}$ et $k=p$, alors puisque $k<p+\alpha$, $\alpha\neq 0$. Comme $g^{(k)}\in C^{0,\alpha}$, il existe une constante K telle que $|g^{(k)}(t)|\leqslant K|t|^\alpha$. Comme pour le cas précédent on a donc, $|g(x)|\leqslant K'|x|^{k+\alpha}=K'|x|^{p+\alpha}$.

On peut donc écrire, puisque $\delta<p+\alpha$, $g(x)=|x|^\delta f_\delta(x)$ où f_δ est une fonction continue nulle à l'origine.

Soient $a_1, a_2,..., a_r$ des éléments distincts de I. On considère les fonctions $g\in C^{p,\alpha}$ qui vérifient les propriétés (P_j) $(j=1,..., r)$ suivantes: il existe un entier k_j tel que $0\leqslant k_j<p+\alpha$ pour lequel

$$g(a_j)=g'(a_j)=\cdots=g^{(k_j)}(a_j)=0.$$

Si g vérifie les propriétés (P_j) $(j=1,..., r)$, pour $\gamma=(\gamma_1,..., \gamma_r)\in\mathbb{R}^{+r}$ vérifiant $0<\gamma_i<p+\alpha$, $\gamma_i\leqslant k_i+1$ $(i=1,..., r)$, on peut affirmer, d'après le Lemme 1, qu'il existe deux fonctions continues m et f_γ telles que

$$m(x)=|x-a_1|^{\gamma_1}\cdots|x-a_r|^{\gamma_r} \quad (x\in I) \quad \text{et} \quad g=mf_\gamma.$$

On note $|\gamma|=\sup_i\gamma_i$. Nous nous proposons, dans cet article, de donner une majoration de f_γ en fonction de g et de $M(g)$. Plus précisément nous démontrerons le résultat suivant:

THÉORÈME. *Pour* p, α, $k_1,..., k_r$, γ *donnés, il existe deux constantes* A *et* B *telles que pour toute fonction* $g\in C^{p,\alpha}$ *vérifiant les conditions* (P_j) $(j=1,..., r)$ *on ait*

$$\text{soit } \|f_\gamma\|\leqslant A\,\|g\|,$$
$$\text{soit } \|f_\gamma\|\leqslant B(M(g))^{|\gamma|/(p+\alpha)}\,\|g\|^{1-(|\gamma|/(p+\alpha))}.$$

Voici les deux étapes principales de la démonstration:

(1) Nous traitons pour commencer le cas des polynômes en utilisant comme outil fondamental l'inégalité de Bernstein.

(2) Nous considérons ensuite le cas des fonctions de $C^{p,\alpha}$ en remarquant qu'elles peuvent être approchées par les polynômes (théorème de Jackson) de façon bien controlée et en utilisant pour les polynômes d'approximation les inégalités obtenues dans la première partie.

Inégalités pour les Polynômes

On note H_m l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Proposition 1. *Soient β et δ deux réels vérifiant $0 \leqslant \beta < \delta$. Alors pour tout $p \in H_n$ $(n \geqslant 1)$ on a*

$$\| |x|^\beta P \| \leqslant (C(\delta)\, n)^{\delta-\beta}\, \| |x|^\delta P \|,$$

avec $C(\delta) = (24/23)(1 + 1/\delta)(1+\delta)^{1/\delta}$.

Démonstration. Pour $n = 1$ le résultat est évident. On suppose donc $n \geqslant 2$. Rappelons l'inégalité de Bernstein [2, p. 90]. Si T est un polynôme trigonométrique de période 2π, d'ordre au plus n, on a $\|T'\|^* \leqslant n \|T\|^*$. Posons $T(\theta) = P(\cos\theta)$ et soit θ_0 tel que $|T(\theta_0)| = \|T\|^*$. Soit $a \in \,]0, 1[$ et $J_n = [\theta_0 - an^{-1}, \theta_0 + an^{-1}]$. Alors d'après l'inégalité de Bernstein, pour $\theta \in J_n$ on a $|T(\theta) - T(\theta_0)| \leqslant |\theta - \theta_0|\, n \|T\|^* \leqslant a \|T\|^*$, donc, pour $\theta \in J_n$ $|T(\theta)| \geqslant (1-a)\|T\|^*$ et par suite:

$$\begin{aligned}
\| |x|^\delta P \| = \| |\cos\theta|^\delta T \|^* &\geqslant \sup_{\theta \in J_n} |\cos\theta|^\delta\, |T(\theta)| \\
&\geqslant (1-a)\|T\|^* \sup_{\theta \in J_n} |\cos\theta|^\delta \\
&\geqslant (1-a)\|T\|^* (\sin an^{-1})^\delta \\
&\geqslant (1-a)\, a^\delta n^{-\delta} [1 - (a^2/6n^2)]^\delta \, \|T\|^* \\
&\qquad \text{car } \sin(a/n) > (a/n) - (a^3/6n^3).
\end{aligned}$$

Nous prendrons $a = \delta/(1+\delta)$ ce qui rend maximum le coefficient $a^\delta(1-a)$ et l'on a puisque $a < 1$ et $n \geqslant 2$, $1 - (a^2/6n^2) \geqslant 23/24$. Par suite:

$$\|T\|^* \leqslant (24/23)^\delta\, (1 + \delta^{-1})^\delta\, (1+\delta)\, n^\delta\, \| |x|^\delta P \|. \tag{1}$$

Soit $b \in]0, 1[$ et I_n l'ensemble des points θ tels que $|\cos\theta| \leqslant b/n$ alors, d'après (1):

$$\sup_{\theta \in I_n} |\cos\theta|^\beta |T(\theta)| \leqslant (b/n)^\beta \|T\|^*$$

$$\leqslant (24/23)^\delta (1 + 1/\delta)^\delta (1 + \delta) b^\beta n^{\delta-\beta} \||x|^\delta P\|$$

et

$$\sup_{\theta \in \complement I_n} |\cos\theta|^\beta |T(\theta)| \leqslant (n/b)^{\delta-\beta} \||\cos\theta|^\delta T\|^*,$$

donc, au total:

$$\||x|^\beta P\| \leqslant \operatorname{Max}[b^{\beta-\delta}, b^\beta (24/23)^\delta (1 + 1/\delta)^\delta (1 + \delta)] n^{\delta-\beta} \||x|^\delta P\|.$$

Choisissons $b = (23/24)(\delta/(\delta + 1))(1 + \delta)^{-1/\delta}$ ce qui réalise l'égalité des deux termes dont il faut prendre le maximum et ce maximum vaut alors $[(24/23)(1 + 1/\delta)(1 + \delta)^{1/\delta}]^{\delta-\beta}$. L'inégalité est ainsi démontrée.

Dans le cas où β et δ sont des entiers, on peut améliorer ce résultat en utilisant une méthode plus simple:

PROPOSITION 2. *Pour $P \in H_n (n \geqslant 0)$ on a*:

$$\|P\| \leqslant [(n + 1)^2 + 1]^{1/2} \|xP\|.$$

Démonstration. Donnons une autre forme de l'inégalité de Bernstein: si $S \in H_n$ alors, pour $x \in]-1, 1[$, $|S'(x)| \leqslant n(1 - x^2)^{-1/2} \|S\|$. Posons $R(x) = xP(x)$ et soit $a \in]0, 1[$. On a $R(x) = R(0) + xR'(x_0)$ pour un x_0 compris entre 0 et x. Donc, $P(x) = R'(x_0)$ et si $|x| < a$, d'après l'inégalité de Bernstein $|P(x)| \leqslant (n + 1)(1 - a^2)^{-1/2} \|xP\|$. Mais si $|x| \geqslant a$ il est clair que $|P(x)| \leqslant a^{-1} \|xP\|$, donc,

$$\|P\| \leqslant \operatorname{Max}[a^{-1}, (n + 1)(1 - a^2)^{-1/2}] \|xP\|.$$

Choisissons $a = [(n + 1)^2 + 1]^{-1/2}$, on a alors l'égalité des deux termes dont il faut prendre le maximum et ce maximum vaut $[(n + 1)^2 + 1]^{1/2}$ ce qui démontre la proposition.

Des calculs totalement analogues nous conduisent aux résultats suivants:

PROPOSITION 3. *Sous les hypothèses de la Proposition* 1 *on a*:

$$\|(1 \pm x)^\beta P\| \leqslant (\sqrt{2}\, C(2\delta)\, n)^{2\delta - 2\beta} \|(1 \pm x)^\delta P\|.$$

PROPOSITION 4. *Pour $P \in H_n$ $(n \geqslant 0)$ on a*:

$$\|P\| \leqslant (n + 1)^2 \|(1 \pm x) P\|.$$

Soit

$$m_1(x) = (1-x)^{b_1}\,|x-x_1|^{\beta_1} \cdots |x-x_r|^{\beta_r}\,(1+x)^{b_2},$$
$$m_2(x) = (1-x)^{d_1}\,|x-x_1|^{\delta_1} \cdots |x-x_r|^{\delta_r}\,(1+x)^{d_2},$$

où $x_1,\ldots,x_r$ *sont des éléments distincts de* $]-1,1[$ *et où* $0 \leqslant b_1 \leqslant d_1$, $0 \leqslant b_2 \leqslant d_2$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \delta_i$ $(i=1,\ldots,r)$.

COROLLAIRE. *Il existe une constante* $C(m_1, m_2)$ *telle que pour* $P \in H_n$ $(n \geqslant 1)$ *on ait* $\|Pm_1\| \leqslant C(m_1, m_2)\, n^d\, \|Pm_2\|$ *avec*

$$d = \operatorname{Max}\,[\delta_1 - \beta_1,\ldots, \delta_r - \beta_r, 2(d_1 - b_1), 2(d_2 - b_2)].$$

Les exposants de n dans les Propositions 1–4 et le corollaire sont optimaux. Ce résultat est établi dans [1] où l'on démontre en outre des inégalités pour les polynômes, dans les espaces L^p, analogues à celles étudées ici. Cependant, dans [1] les constantes $C(\delta)$ sont moins précises que celles obtenues dans le présent article.

INÉGALITÉS POUR LES FONCTIONS DE $C^{p,\alpha}$

Rappelons pour commencer le théorème d'approximation de Jackson [2, p. 125–129].

THÉORÈME. *Il existe une constante* $K = K(p, \alpha)$ *telle que, pour tout* $n > p$ *et pour toute fonction* $g \in C^{p,\alpha}$ *on puisse trouver un polynôme* $Q_n \in H_n$ *tel que* $\|g - Q_n\| \leqslant Kn^{-p-\alpha}M(g)$.

(On trouvera par exemple dans [2] des valeurs numériques pour la constante K).

Nous allons d'abord étudier le cas des fonctions qui vérifient une seule condition (P_j) à l'origine: on considère les fonctions g de $C^{p,\alpha}$ qui vérifient la propriété (P): il existe un entier k tel que $0 \leqslant k < p + \alpha$ pour lequel

$$g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(k)}(0) = 0.$$

Pour un nombre δ vérifiant $0 < \delta < p + \alpha$, $\delta \leqslant k+1$ soit f_δ la fonction continue telle que $[x]^\delta f_\delta = g$, avec $[x]^\delta = x^\delta$ si $\delta \in \mathbb{N}$ et $[x]^\delta = |x|^\delta$ si $\delta \notin \mathbb{N}$. On désignera par δ' le plus petit nombre entier supérieur ou égal à δ.

PROPOSITION 5. *Pour* p, α, k, δ, *donnés, il existe une constante* C_1 *telle* *que pour toute fonction g vérifiant la propriété (P) et pour tout $n > p$ on puisse trouver un polynôme $P_n \in H_n$ tel que*

$$\|f_\delta - [x]^{\delta'-\delta} P_n\| \leqslant C_1 n^{\delta-p-\alpha} M(g).$$

Démonstration. (1) Supposons pour commencer que $0 < \delta \leqslant 1$ (donc, $\delta' = 1$). D'après le théorème de Jackson, pour $n > p$ il existe un polynôme $Q_n \in H_{n+1}$ tel que $\| g - Q_n\| \leqslant Kn^{-p-\alpha} M(g)$. Donc, puisque $g(0) = 0$, $\| g(x) - Q_n(x) + Q_n(0)\| \leqslant 2Kn^{-p-\alpha} M(g)$. Posons $Q_n(x) - Q_n(0) = xP_n(x)$ $(P_n \in H_n)$. On a pour $s \in \mathbb{N}$ $\|x(P_{n2^s} - P_{n2^{s+1}})\| \leqslant 4Kn^{-p-\alpha} 2^{-s(p+\alpha)} M(g)$ et d'après la Proposition 1, il existe une constante C_2 telle que:

$$\|[x]^{1-\delta} (P_{n2^s} - P_{n2^{s+1}})\| \leqslant C_2 2^\delta n^{\delta-p-\alpha} 2^{-s(p+\alpha-\delta)} M(g);$$

donc, puisque $\delta < p + \alpha$, pour $n \geqslant 1$, la suite $([x]^{1-\delta} P_{n2^s})_{s \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et converge normalement, donc uniformément vers une fonction continue h_n. Comme elle converge simplement vers f_δ pour $x \neq 0$ et que f_δ est continue, il en résulte que pour tout n, $f_\delta = h_n$, donc, que la suite $([x]^{1-\delta} P_{n2^s})_{s \in \mathbb{N}}$ converge normalement vers f_δ et de plus on a

$$\begin{aligned} \|f_\delta - [x]^{1-\delta} P_n\| &\leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \|[x]^{1-\delta} (P_{n2^s} - P_{n2^{s+1}})\| \\ &\leqslant C_1 n^{\delta-p-\alpha} M(g), \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition pour $0 < \delta \leqslant 1$.

(2) Supposons maintenant que $\delta > 1$. Posons $g = f_0 = xf_1 = x^2 f_2 = \cdots = x^{\delta'-1} f_{\delta'-1} = [x]^\delta f_\delta$, $Q_n(x) - Q_n(0) = xP_{n,1}(x)$ et pour $i = 1, 2, \ldots, \delta' - 1$, $P_{n,i}(x) - P_{n,i}(0) = xP_{n,i+1}(x)$, $P_{n,\delta'} = P_n$.

En utilisant de façon répétée la même méthode que dans la première partie de la démonstration et en partant de $\| g - Q_n\| \leqslant Kn^{-p-\alpha} M(g)$, nous obtenons successivement les inégalités suivantes pour $i = 1, \ldots, \delta' - 1$:

$$\|f_i - P_{n,i}\| \leqslant k_i n^{i-p-\alpha} M(g), \tag{2}$$

$$\|f_i - xP_{n,i+1}\| \leqslant 2k_i n^{i-p-\alpha} M(g), \tag{3}$$

où k_1, $k_2, \ldots,$ désignent des constantes, et finalement,

$$\|f_\delta - [x]^{\delta'-\delta} P_n\| \leqslant C_1 n^{\delta-p-\alpha} M(g).$$

PROPOSITION 6. *Pour p, α, k, δ donnés, il existe deux constantes A_1 et B_1 telle que pour toute fonction g satisfaisant la propriété (P) et pour tout $n > p$ on ait*

$$\|f_\delta\| \leqslant A_1 n^{\delta-p-\alpha} M(g) + B_1 n^\delta \| g\|.$$

Démonstration. Nous conservons les notations de la Proposition 5. Nous avons pour $i = 1,..., \delta' - 1$, $\|f_i\| \leqslant \|f_i - P_{n,i}\| + \|P_{n,i}\|$, donc, d'après l'inégalité (2) et la Proposition 1:

$$\|f_i\| \leqslant k_i n^{i-p-\alpha} M(g) + C(1)\, n\, \|xP_{n,i}\|$$

et

$$\|xP_{n,i}\| \leqslant \|xP_{n,i} - f_{i-1}\| + \|f_{i-1}\|.$$

L'inégalité (3) donne

$$\|f_i\| \leqslant [k_i + 2k_{i-1} C(1)]\; n^{i-p-\alpha} M(g) + C(1)\, n\, \|f_{i-1}\|.$$

Il existe donc une constante D_i telle que

$$\|f_i\| \leqslant D_i n^{i-p-\alpha} M(g) + C(1)\, n\, \|f_{i-1}\|. \tag{4}$$

Par ailleurs en utilisant un raisonnement analogue nous avons:

$$\|f_\delta\| \leqslant \|f_\delta - [x]^{\delta'-\delta} P_n\| + \|[x]^{\delta'-\delta} P_n\|$$

et donc, d'après les Propositions 5 et 1, il existe deux constantes C_3 et C_4 telles que

$$\|f_\delta\| \leqslant C_3 n^{\delta-p-\alpha} M(g) + C_4 n^{\delta+1-\delta'} \|xP_n\|.$$

Mais $\|xP_{n,\delta'}\| \leqslant \|xP_{n,\delta'} - f_{\delta'-1}\| + \|f_{\delta'-1}\|$ et en utilisant l'inégalité (3):

$$\|xP_{n,\delta'}\| \leqslant 2k_{\delta'-1} n^{\delta'-p-\alpha-1} M(g) + \|f_{\delta'-1}\|.$$

Il existe donc deux constantes C_5 et C_6 telles que

$$\|f_\delta\| \leqslant C_5 n^{\delta-p-\alpha} M(g) + C_6 n^{\delta+1-\delta'} \|f_{\delta'-1}\|. \tag{5}$$

La conclusion s'obtient alors facilement en combinant les inégalités (4) et (5).

Remarque. Par un changement de variable affine, les résultats des Propositions 5 et 6 sont encore valables quand on remplace I par un intervalle $[a, b]$ borné quelconque. Dans ce changement, l'origine devient le point $(a + b)/2$.

Avant de passer à la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction, nous aurons besoin d'un résultat de prolongement.

LEMME 2 (*Principe de réflexion*). *Il existe une constante C_7 telle que pour toute fonction $g \in C^{p,\alpha}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ on puisse trouver une fonction $\tilde{g}$ vérifiant $\tilde{g} \in C^{p,\alpha}$ sur $[-1, 1]$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ pour $x \in [0, 1]$, $\|\tilde{g}\| \leqslant C_7 \|g\|_{[0,1]}$, $M(\tilde{g}) \leqslant C_7 M(g)$.*

Démonstration. Soit $(c_1, c_2, ..., c_{p+1})$ la solution du système des $p+1$ équations $\sum_{n=1}^{p+1} (-1/n)^j c_n = 1$ $(j = 0, 1, ..., p)$. Alors il est clair que la fonction g définie par:

$$\tilde{g}(x) = g(x) \qquad \text{pour } x \in [0, 1],$$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{p+1} c_n \, g(-x/n) \qquad \text{pour } x \in [-1, 0],$$

répond à la question.

Remarque. Supposons maintenant que g vérifie pour $0 \leqslant k < p + \alpha$, $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(k)}(0) = 0$; alors pour δ vérifiant $0 < \delta < p + \alpha$, $\delta \leqslant k + 1$, on peut écrire d'après le Lemme 1 $g(x) = x^\delta f_\delta(x)$ $(x \in [0, 1])$ où f_δ est continue. De plus, il existe une fonction continue h telle que $\tilde{g}(x) = |x|^\delta$ $h(x)$. Cela résulte aussi du lemme 1 puisque nous avons:

$$\tilde{g}(0) = \tilde{g}'(0) = \cdots = \tilde{g}^{(k)}(0) = 0.$$

Il est clair que $h = f_\delta$ sur $[0, 1]$.

PROPOSITION 7. *Pour p, α, $k_1, ..., k_r$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r)$ donnés il existe deux constantes A_2 et B_2 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute fonction $g \in C^{p,\alpha}$ vérifiant les propriétés (P_j) $(j = 1, ..., r)$ on ait*

$$\|f_\gamma\| \leqslant A_2 n^{|\gamma| - p - \alpha} M(g) + B_2 n^{|\gamma|} \|g\|.$$

Démonstration. On peut trouver des intervalles fermés $I_1, ..., I_n$ tels que $\bigcup_{s=1}^n I_s = I$, et que pour tout j, a_j appartienne à un seul intervalle I_s dont il est le milieu si $|a_j| \neq 1$ et une extrèmité si $|a_j| = 1$. Sur chacun des intervalles I_s dont l'un des a_j est le milieu on peut appliquer la Proposition 6. Si $|a_j| = 1$ on peut se ramener après changement de variable au cas où $g(x) = x^\delta f_\delta(x)$ $(x \in [0, 1])$. Le Lemme 2 et la remarque qui le suit nous permettent donc de supposer que a_j est un point intérieur et d'appliquer de nouveau la Proposition 6. La combinaison des n inégalités obtenues nous donne le résultat.

Démonstration du Théorème. Si $g \in H_{p+1}$, d'après le corollaire, la première inégalité est vérifiée pour g. Si $g \notin H_{p+1}$, on est assuré que $M(g) \neq 0$, $\|g\| \neq 0$. Si $(A_2 M(g)/B_2 \|g\|) \leqslant p^{p+\alpha}$ en prenant $n = p + 1$ dans la Proposition 7 on a $\|f_\gamma\| \leqslant 2(p+1)^{|\gamma|} \|g\|$. Si $(A_2 M(g)/B_2 \|g\|) > p^{p+\alpha}$ on peut choisir n tel que: $(A_2 M(g)/B_2 \|g\|)^{1/(p+\alpha)} \leqslant n < (A_2 M(g)/B_2 \|g\|)^{1/(p+\alpha)} + 1$.

On a alors $n \leqslant 2(A_2 M(g)/B_2 \|g\|)^{1/(p+\alpha)}$, donc, d'après la Proposition 7 $\|f_\gamma\| \leqslant 2^{|\gamma|+1} B_2 (A_2 M(g)/B_2 \|g\|)^{|\gamma|/(p+\alpha)} \|g\|$ et par suite il existe une constante B telle que $\|f_\gamma\| \leqslant B(M(g))^{|\gamma|/(p+\alpha)} \|g\|^{1-(|\gamma|/(p+\alpha))}$.

Inégalités pour le Produit

Soit $f \in C^{p,\alpha}$ et $m(x)=|x-a_1|^{\gamma_1}\cdots|x-a_r|^{\gamma_r}$ (avec les mêmes notations que ci-dessus). Peut-on minorer $\|fm\|$ en fonction de f? Nous répondons par l'affirmative en utilisant les mêmes méthodes que pour la division. Les calculs étant encore plus faciles, nous donnons les résultats suivants sans démonstration:

Proposition 8. *Pour p, α, m donnés, il existe deux constantes A_3 et B_3 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute $f \in C^{p,\alpha}$ on ait*

$$\|f\| \leqslant A_3 n^{|\gamma|}\|fm\| + B_3 n^{|\gamma|-p-\alpha} M(f).$$

Proposition 9. *Pour p, α, m donnés, il existe deux constantes A_4 et B_4 telles que pour toute $f \in C^{p,\alpha}$ on ait*

$$\textit{soit} \quad \|f\| \leqslant A_4\|fm\|,$$
$$\textit{soit} \quad M(f) \neq 0 \qquad \textit{et} \qquad \|f\|^{1+t}(M(f))^{-t} \leqslant B_4\|fm\|,$$

avec $t=|\gamma|/(p+\alpha-|\gamma|)$.

Proposition 10. *Pour p, α, m donnés il existe une constante A_5 telle que pour tout $f \in C^{p,\alpha}$ on ait, si $\|f\| \neq 0$,*

$$\|f\| \leqslant A_5 \operatorname{Max}[(M(f)/\|f\|)^t, 1]\,\|fm\|,$$

t ayant la même valeur que précédemment.

Remarque. L'inégalité de Landau sur l'intervalle I affirme que si g est de classe C^2 alors on a soit $\|g'\| \leqslant 2\|g\|$ soit $\|g'\| \leqslant 2\|g\|^{1/2}\|g''\|^{1/2}$; si $g(0)=0$, $g(x)=xf(x)$, et il est clair que $\|f\| \leqslant \|g'\|$. L'inégalité de Landau nous donne alors le résultat du théorème dans ce cas particulier.

On comprend facilement comment on peut utiliser ce procédé pour démontrer de façon élémentaire le théorème étudié ici, sous les conditions restrictives $\gamma \in \mathbb{N}^r$, $\alpha=0$.

References

1. P. Goetgheluck, Polynomial inequalities and Markov's inequality in weighted L^p-spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **33** (1979), 325–331.
2. I. P. Natanson, "Constructive Function Theory," Vol. 1, Ungar, New York, 1964.